Notes on 2-fold branched coverings (結び目と3次元多様体)

河野, 正晴

数理解析研究所講究録
346巻 1979年 66-79

Notes on 2-fold branched coverings

北大 理数　河野 正晴

このNoteでは、2-fold branched coveringのいくつかの性質について述べる。§1ではbranch setのホモロジー的な性質。§2ではsurfaceのhomeotopy groupのあるsubgroupとbranch setの関係について、である。

最初にbranched coveringの定義を書く。

Def　M, Nをcompact n-manifoldとします。A, BをM, Nのproperな$(n-2)$-submanifoldとする。(AがMでproperとは $\partial A = A \cap \partial M$)

$f:(M, A) \longrightarrow (N, B)$ がbranched coveringであるとは、(i) Nのopen baseの逆像のcomponent全体がMのbaseとなる (ii) $f(A)=B$, $f(M-A)=N-B$ で $f|_{M-A}: M-A \longrightarrow N-B$ は普通のcoveringになっている。を満たす時のこととする。

§1. branch setのホモロジー的性質

$p : (M^3, \tilde{L}^1) \longrightarrow (N^3, L^1)$ を2-fold branched covering とする。(ここで、2-foldという意味は $x \in N-L$ に対し $p^{-1}(x)$ が2個ということ) ただし, M, Nは closed 3-manifoldsで $\tilde{L}$, Lはその中の links。N上のLで branchする2-fold covering space をつくる時、ふつうNの中でLを boundする surface Fをとり、NをFで cutする。そして、そのcopyを2コ用意し、Fに対応するF_1, F_2をはりあわせる。

この時Lはあるsurfaceをboundするということが仮定されているが、このことは正しいだろうか? 次の定理は2-fold branched coveringの時は正しいということを示している。

<u>Theorem 1</u>

M, Nを orientable closed 3-manifoldsとし, $\tilde{L}$, Lをその中の linkとする。

$\exists p : (M, \tilde{L}) \longrightarrow (N, L)$ 2-fold branched covering

$\Longrightarrow \quad [L] = 0 \in H_1(N; \mathbb{Z}_2)$

（証明の概略）

τ; $M \to M$ を non-trivial covering transformation とすると、この involution τ に対し characteristic mfd $\hat{F}$ が存在する。ここで $\hat{F}$ は closed 2-mfd で、$\tilde{L} \subset \hat{F}$。よって $p(\hat{F}) = F$ とすると、F は 2-mfd（non-orientable かもしれない）で $\partial F = L$ となる。よって o.k.。

—

又、高次元でも同様に次の定理が示される。

<u>Theorem 2</u>

M, N; closed $(n+2)$-mfd

$\tilde{L}, L$ は closed n-submfd of M, N

$p: (M, \tilde{L}) \longrightarrow (N, L)$ 2-fold branched covering

L は N の locally flat な submfd

$\Longrightarrow [L] = 0 \in H_n(N; Z_2)$

更に、M, N に boundary があっても次の定理が成り立つ。

<u>Theorem 3</u>

M, N を compact $(n+2)$-mfd, $\tilde{L}, L$ をその proper な n-submfd とする。（L は N で locally flat）

$p: (M, \hat{L}) \to (N, L)$ 2-fold branched covering

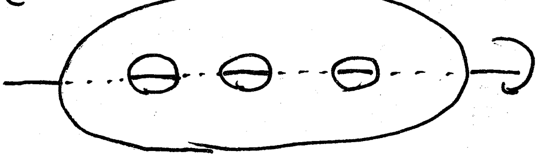
$\Rightarrow$ $[L] = 0 \in H_n(N, \partial N; \mathbb{Z}_2)$

Remark

1. Theorem 1, 2, 3において係数を$\mathbb{Z}_2$から$\mathbb{Z}$にかえると定理は成立しない。
2. 同じく、2-foldを一般のbranched coveringにすると(少なくともirregularも許すと)、定理は成立しない。

§2. 曲面のhomeotopy groupとbranched covering

Fをconnected closed orientable surfaceでgenusがnのものとします。H(F)をF上のorientation preserving homeo. 全体として、$H_0(F)$をそのなかでidとisotopicなもの全体とする。H(F), $H_0(F)$は写像の合成によって群をなし、特に$H_0(F)$はH(F)のnormal subgroupをなす。H(F)の$H_0(F)$による剰余群を$\mathcal{M}(F)$と書きFのhomeotopy groupと呼ぶ。Fをstandardな位置(Look ⇒)に



おいた時180°回転のhomeo.をT

と書く。 $H(F)$ から $\mathcal{M}(F)$ への自然な準同型を φ と書く。
更に、$\hat{\Lambda}(F) \equiv \{ f \in H(F) \mid fT = Tf \}$，$\Lambda(F) \equiv \varphi(\hat{\Lambda}(F))$
とする。

(i) $F/T \cong S^2$ となるので，$p : F \longrightarrow S^2$ で $\mathrm{cov}(p) = \{1, T\}$
となる 2-fold branched covering が存在する。この
branched covering の下の branch set を B，上の branch
set を $\tilde{B}$ とする。

$h \in \hat{\Lambda}(F)$ に対し，$g \in H(S^2)$
が存在して，右の図式を可換にし，g
は $g(B) = B$ をみたす。h に対して
この様な g は一意的。又逆に，$g(B)=B$
をみたす $g \in H(S^2)$ に対し，右の図式

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[r, "g"'] & S^2 \end{tikzcd}$$

を可換にする $h \in H(F)$ は存在して，$h \in \hat{\Lambda}(F)$ となる。こ
の様な h は2個存在し，それを h，h' とすると $h' = Th$ とな
っている。

(ii) $\tilde{H}(m)$ を S^2 の geometric $(2m+2)$-braid 全体
とする。 つまり，geometric $(2m+2)$-braid
$\{b_1, \cdots\cdots, b_{2m+2}\}$ とは次の様なもの。$P_1, \cdots, P_{2m+2}$ を S^2 にとり以下 fix

0) $b_i : I \longrightarrow S^2 \times I$ map

1) $b_i(t) \in S^2 \times \{t\}$ for ${}^\forall t \in I$，$i = 1, \cdots, 2m+2$

2) $b_i(0) = (p_i, 0)$ とすると，$i = 1, \cdots, 2m+2$

$\{b_1(1),\cdots,b_{2m+2}(1)\}=\{(p_1,1),\cdots\cdots,p_{2m+2}(1)\}$

(ただしsetとしてのイコール)

3) $i\neq j$の時　$b_i(t)\neq b_j(t)$　for $\forall t\in I$

この$\hat{H}(m)$に次の様に同値関係をいれる。

(a) $\{b_1(t),\cdots,b_{2m+2}(t)\}\sim_a\{b'_1(t),\cdots,b'_{2m+2}(t)\}$

とは、$\exists B_k : I\times I\longrightarrow M\times I$　$(k=1,\cdots,2m+2)$

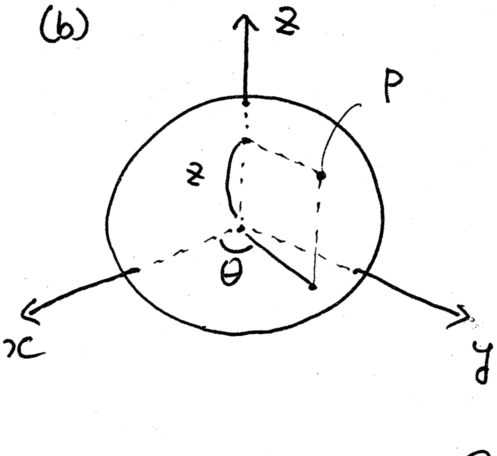
$\ni$ $B_k|I\times\{0\}=b_k$,　$B_k|I\times\{1\}=b'_k$

そして、各$\tau\in I$に対し

$\{B_1|I\times(\tau),\cdots\cdots,B_{2m+2}|I\times\{\tau\}\}$ が

geometric $(2m+2)$-braidになっているもの

(b)



$S^2=\{p\in\mathbb{R}^3 \mid |x|=1\}$ とした時　pのz座標をz、pをxy-平面へ射影した点とx軸のなす角をθとして、$p=(z,\theta)$と表わす。($z=\pm1$の時は$\theta=0$ときめておく)

$\hat{R}_t: S^2\longrightarrow S^2$ を $\hat{R}_t(z,\theta)=(z,\theta+2\pi t)$ ときめる。そして $R: S^2\times I\longrightarrow S^2\times I$

$$(a,t)\longmapsto(\hat{R}_t(a),t)$$

とする。$\{b_1,\cdots,b_{2m+2}\}\sim_b\{b'_1,\cdots,b'_{2m+2}\}$

とは　$R(b_i(t))=b'_i(t)$　for $\forall t\in I$, $i=1,\cdots,2m+2$

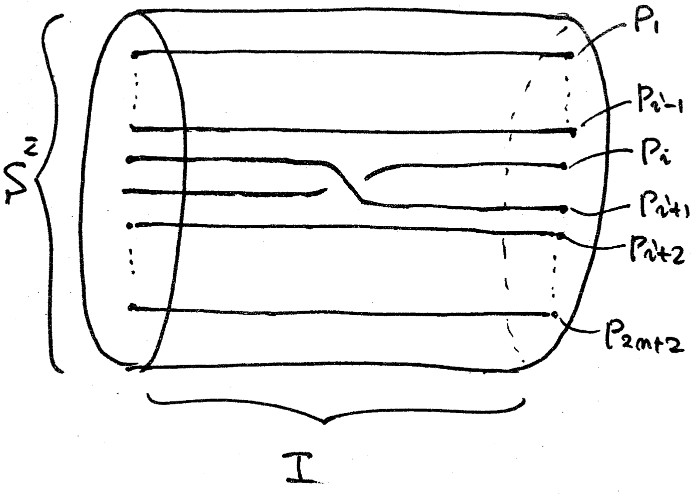
ときめる。そして $\sim_a$ と $\sim_b$ から generate される同値関係を $\sim$ と書き、これで $\tilde{H}(n)$ をわったsetを $H(n)$ と書く。

$\tilde{H}(n)$ の元は $S^2\times I$ の link と見ることができる。これを L とすると、L が属する $H(n)$ の class を $[L]$ と書く。

さて、$H(n)$ に積を定義する。$\tau_1: S^2\times I \longrightarrow S^2\times I$ を $\tau_1(a,t)=(a,\frac{t}{2})$, $\tau_2: S^2\times I\longrightarrow S^2\times I$ を $\tau_2(a,t)=(a,\frac{1}{2}+\frac{t}{2})$ とする。 $[L]$, $[L']\in H(n)$

$\hat{L}=\tau_1(L)\cup\tau_2(L')$ として

$[\hat{L}]=[L]\cdot[L']$ で積を定義する。この積は well-def. でこの積により $H(n)$ に群をなす。



左図の様な link を L_i とすると $L_i\in\tilde{H}(n)$ なので、$l_i=[L_i]$ として $H(n)$ の元がきまる。$H(n)$ は l_1, $l_2,\cdots, l_{2n+1}$ によって generate されるが、この群は Magnus によって決定された群と同型になるので、次の様な表示をもつ

<u>Theorem 4</u> [Magnus]

$H(n)$ は次の generator と relator で決定される。

- generators $l_1, \cdots, l_{2n+1}$
- defining relations

(i) $[l_i, l_j] = 1$ for $|i-j| \geq 2$

(ii) $l_i l_{i+1} l_i = l_{i+1} l_i l_{i+1}$

(iii) $(l_1 l_2 \cdots l_{2n+1})^{2n+2} = 1$

(iv) $l_1 l_2 \cdots l_{2n} l_{2n+1}^2 l_{2n} \cdots l_2 l_1 = 1$

(iii) さて、(i)で定義した$\Lambda(F)$と、(ii)で定義した$H(n)$には次の様な関係がある。

Theorem 5

Fをconnected orientable closed surfaceでgenusがnとする。ここで$n>1$とすると、

$\rho: \Lambda(F) \longrightarrow H(n)$ なるonto homoが存在して、

$\ker \rho = \{1, T\}$ となる。

（証明の概略）

ρは次の様にして定義する。$f \in \Lambda(F)$に対し、$\widehat{\Lambda}(F)$の元$\tilde{f}$で$\varphi(\tilde{f}) = f$となるものがある。(i)よりこの$\tilde{f}$に対して$g \in H(S^2)$が一意的に存在して、$gp = p\tilde{f}$となる。gはisotopic to id. だから、$G: S^2 \times I \longrightarrow S^2$で、$G_0 = id$, $G_1 = g$となるisotopyが存在する。このGに対し、$\hat{G}: S^2 \times I \longrightarrow S^2 \times I$を$\hat{G}(a,t) = (G_t(a), t)$と

定める。 $L_0 = \bigcup_{i=1}^{2n+2} P_i \times I$ に対し，$L_f = \widetilde{G}(L_0)$ とし，$[L_f] = l_f$ として，$P(f) = l_f$ と定める。

このmapがwell-def.になれば他の性質はすぐ出てくる。このmapがwell-def.になるためには次のことが言えればo.k.。

<u>Lemma 1</u> [Birman]

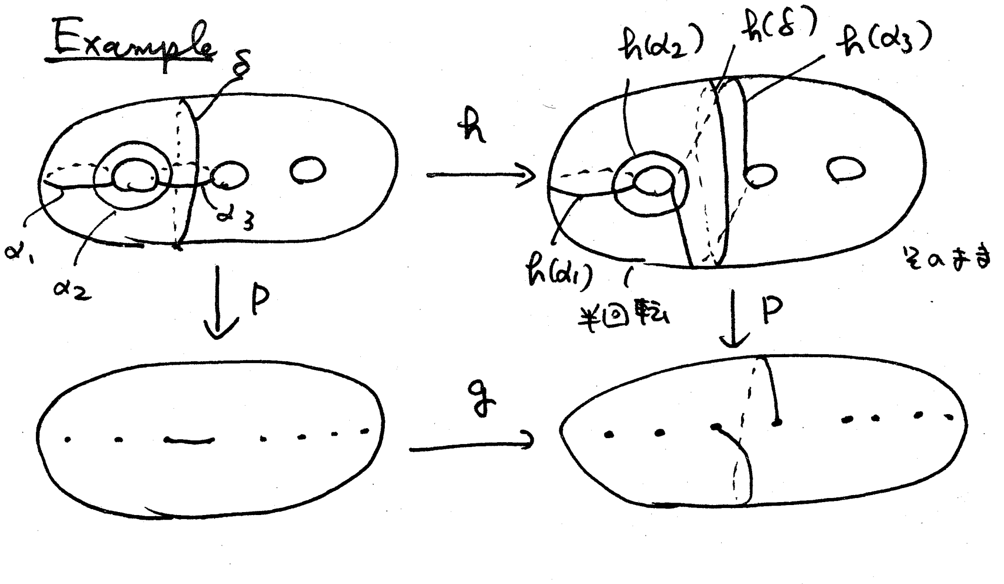
$n > 1$ として，Fをconnected closed orientable surfaceとする。$f \in \hat{\Lambda}(F)$に対して，fとidがH(F)において同じconnected componentにはいれば，$\hat{\Lambda}(F)$においても同じconnected componentにはいる。

(証明はLook [BH])

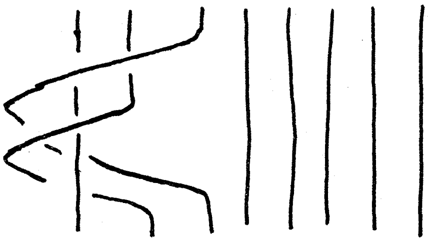
よって定理は成り立つ。

(iv) 上の結果を使って，$\Lambda(F)$の元をDehn twistの積で表わすことができる。

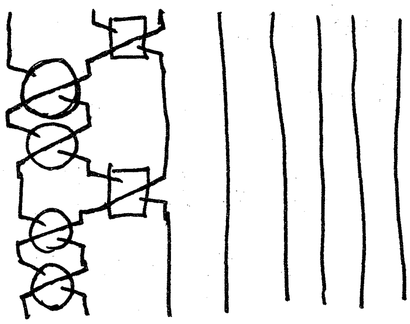
<u>Example</u>



δのまわりのhalf twistをhとする。この時 $\rho(h) = [L_h]$ を見てやると、$\rho(\delta)$のまわりのtwistに対応してるので、L_hは下の(Fig 1)つまり(Fig 2)の様にな

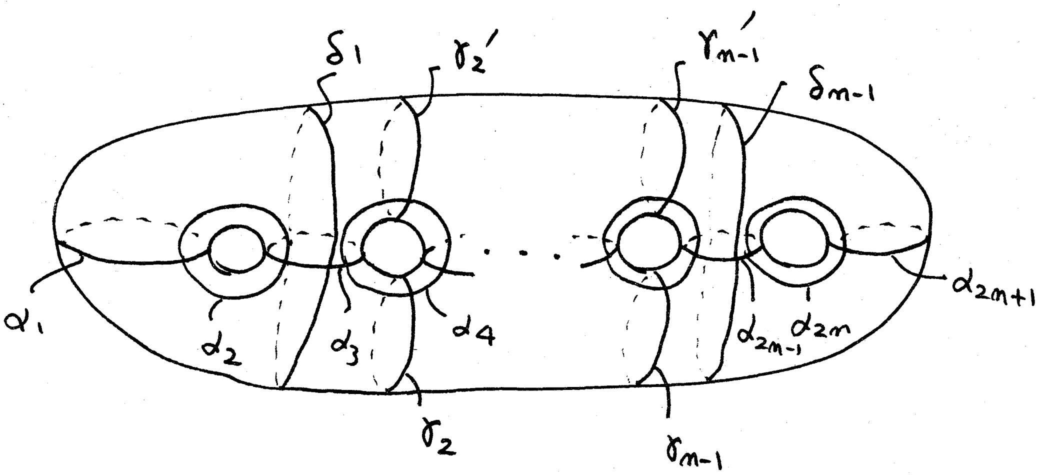


(Fig. 1)



(Fig 2)

っている。○に対応するのは$\Lambda(F)$においてはα_1のまわりのDehn twist a_1，□に対応するのはα_2のまわりのDehn twist a_2である。よって $\varphi(h) \equiv \varphi(a_1 a_1 a_2 a_1 a_1 a_2)$ (mod $\{1, T\}$) となる。実際に見てやると、 $\varphi(h) \equiv \varphi(a_1 a_1 a_2 a_1 a_1 a_2)$ となる。



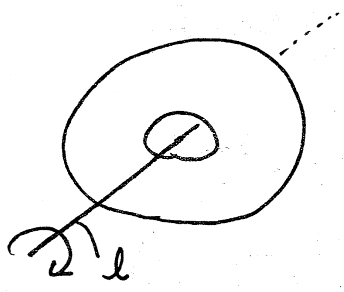
一般に genus n の surface に対し、surface F 上の loop を上の様にきめる。そして、α_i のまわりの Dehn twist を a_i, δ_i のまわりの Dehn twist を d_i, γ_i のまわりの Dehn twist と γ_i' のまわりの Dehn twist の積を c_i, δ_i のまわりの half twist を $\hat{d}_i$ とする。この時 $d_i = \hat{d}_i \cdot \hat{d}_i$ となるが、Example と同じ様にやれば次のことがわかる。

Proposition 1

$$\hat{d}_i \cong a_1 \cdot a_1 a_2 a_1 \cdot a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 \cdot \cdots\cdots \cdot a_1 a_2 \cdots a_{2i} \cdots a_1 \cdot a_1 a_2 \cdots a_{2i}$$

$$c_i \cong a_1 \cdot a_1 a_2 a_1 \cdot a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 \cdot \cdots\cdots \cdot a_1 a_2 \cdots a_{2i-1} \cdots a_1 \cdot a_1 a_2 \cdots a_{2i-1}$$

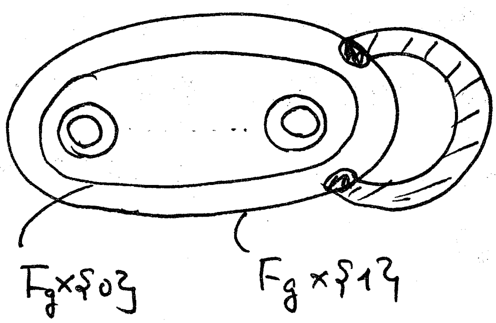
Remark



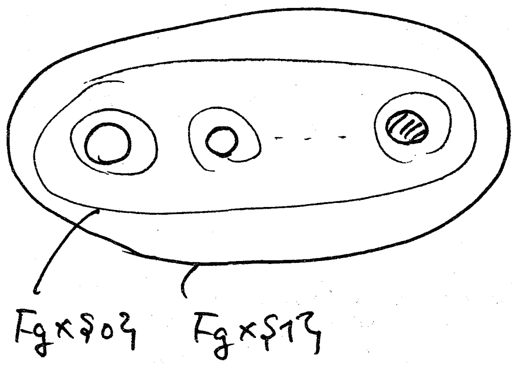
Theorem 5 が $n = 1$ で成立しないのは、Lemma 1 が成立しないから。たとえば左の図で l 軸について180°回転させた homeo f は H(T) では id と arc によって結べるが、$\hat{\Lambda}(F)$ では結べない。$n > 1$ の時はこの様なことがおこらない。

(※※) 解析研で話した後に、横山さんから聞いたのですが、§2の(iii)までの様な内容は Birman がやっているとのことです。(Look [B], [BH])

(v) 次に $\Lambda(F)$ と 3-mfd の 2-fold branched covering の関係について述べる。



$(g, g+1)$ で左図の様な 3-mfd を表わす。つまり $(g, g+1) = (F_g\times I)\cup(D^1\times D^2)$ ここで g は自然数(0も含む)、F_g は genus g の closed ori. surface で、1-handle $D^1\times D^2$ は $F_g\times\{1\}$ にはりついているとする。I は unit interval



$(g, g-1) = (F_g\times I)\cup(D^2\times D^1)$ g は自然数(0を含まない)で 2-handle は $F_g\times\{1\}$ 上の homotopic non-zero の curve にはりついているとする。(ただし T について invariant な curve とする)

(*) $(n_1, \cdots, n_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ で次の様な mfd を表わす。ただし $n_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ で $|n_i-n_{i+1}|=1$, $|n_1-n_m|=1$ $\alpha_i\in\Lambda(F_{n_i})$ とする。

$(n_i, n_{i+1}) = (F_g\times I)\cup(\text{handle})$ となっているが $\partial(n_i, n_{i+1})$ で $F_g\times\{0\}$ の方を $\underline{\partial}(n_i, n_{i+1})$,

のこりを $\partial^+(n_i, n_{i+1})$ とする。

さて、$(n_1,\cdots,n_m ; \alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ は

$(n_1,n_2),(n_2,n_3),\cdots,(n_{m-1},n_m),(n_m,n_1)$

を用意し $\partial^+(n_{i-1},n_i)$ と $\partial^-(n_i,n_{i+1})$ を α_i ではりあわせたmfdとする。($i=2,\cdots,m-1$ までだが、$i=1,m$ も同じ様にはりあわす。)

$$(n_1,n_2)\underset{\alpha_2}{\vee}(n_2,n_3)\underset{\alpha_3}{\vee}\cdots\cdots(n_{m-1},n_m)\underset{\alpha_m}{\vee}(n_m,n_1)$$

$$\alpha_1$$

この様なmfd全体のsetを $\mathcal{M}$ とおく。

又、$[n_1\cdots\cdots n_m, \alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}]$ で次の様なmfdを表わす。

$$(0,1)\underset{\alpha_0}{\vee}(1,n_1)\underset{\alpha_1}{\vee}(n_1,n_2)\cdots\underset{\alpha_m}{\vee}(n_m,1)\underset{\alpha_{m+1}}{\vee}(1,0)$$

ただし

$n_1 = 0$ or 2, $n_m = 0$ or 2, $\alpha_0,\alpha_{m+1}\in\Lambda(F_1)$

$|n_i - n_{i+1}| = 1$, $\alpha_i \in \Lambda(F_{n_i})$ $(i=1,\cdots,m)$

つまり、(n_i,n_{i+1}) を用意し、$\partial^+(n_{i-1},n_i)$ と $\partial^-(n_i,n_{i+1})$ をはりあわせさらに $(0,1)$ と $(1,0)$ をはりあわせる。この時 $\partial[n_1,\cdots,n_m,\alpha_0,\cdots,\alpha_{m+1}]$ は2個の2-sphereになるがここに3-ballをはりつける。

このmfdを $\langle n_1,\cdots,n_m ; \alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}\rangle$

と書く。(このmfd全体を $\widetilde{\mathcal{N}}$ と書く) この時、次の定理が成り立つ

Theorem 6

$p : (M, \tilde{L}) \longrightarrow (S^2 \times S^1, L)$ 2-fold branched cover

$\Longleftrightarrow$ $M = N \# \ell(S^2 \times S^1)$

ただし、$N \in \mathcal{N}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ で

$\ell \neq 0$ の時は $N = (m_1, \cdots, m_m, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$

と書いた時 $m_i = 0$ なるものが一個はあるものと

する。

Theorem 7

$p : (M, \tilde{L}) \longrightarrow (S^3, L)$ 2-fold branched covering

$\Longleftrightarrow$ $M = N \# \ell(S^2 \times S^1)$

ただし $N \in \widetilde{\mathcal{N}}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(証明はともに略)

Reference

[B] Birman, "Mapping class groups and their relationship to braid groups," Com. Pure and App. Math. 22 (213-238)

[BH] Birman & Hilden, "On the mapping class groups of closed surfaces as covering space," Ann. of Math Studies 66